長崎大学大学院総合生産科学研究科 博士前期課程 総合生産科学専攻
共生システム科学コース（電気・機械システム分野）および海洋未来科学コース
機械系　令和６年度 一 般 入 試 【夏期募集】

数　学

$\boxed{1}$ 原点を O とする xy 座標平面内の曲線 C： $y = y(x)$ 上の 2 点 $\mathrm{P_0}, \mathrm{P}$ を $\mathrm{P_0}(0, y(0)), \mathrm{P}(x, y(x))$ $(x > 0)$ とし，x 軸上の点 Q を $\mathrm{Q}(x, 0)$ とする。$\mathrm{P_0}, \mathrm{P}$ 間の曲線 C の長さ $\displaystyle\int_0^x \sqrt{1 + \{y'(t)\}^2}\,\mathrm{d}t$ と，$\mathrm{P_0}, \mathrm{P}$ 間の曲線 C と線分 $\mathrm{PQ}, \mathrm{QO}, \mathrm{OP_0}$ で囲まれる領域の面積 $\displaystyle\int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t$ は,

$$\int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t = k\int_0^x \sqrt{1 + \{y'(t)\}^2}\,\mathrm{d}t$$

を満足する (k は正の実数)。以下の問いに答えなさい。ただし，すべての $x > 0$ に対して，$y(x) > 0$, $y(x) \fallingdotseq k$, $y'(x) > 0$ とする。

(1) $h(u) = \log\left(2\sqrt{u^2 - s^2} + 2u\right)$ とする (s は定数)。$\dfrac{\mathrm{d}h(u)}{\mathrm{d}u}$ を求めなさい。

(2) $y'(x)$ を $y(x)$ と k を用いて表しなさい。

(3) $y(0) = k$ を満足する y を求めなさい。

$\boxed{2}$ 2×2 行列 A を $A = \begin{bmatrix} a+2 & 1 \\ 1 & a+2 \end{bmatrix}$ とする (a は実数)。また，行列 A の固有値を λ_1, λ_2 $(\lambda_1 \leqq \lambda_2)$ とし，λ_1, λ_2 に対応する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$ ($\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ は実数。$\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$) とする。以下の問いに答えなさい。

(1) λ_1, λ_2 をそれぞれ求めなさい。また，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ のうち，$\|\boldsymbol{v}_1\| = \|\boldsymbol{v}_2\| = 1$ であるものをそれぞれ求めなさい。

(2) (1) の $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ を用いて 2×2 行列 P を $P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix}$ と定義する。$P^{-1} = P^{\mathrm{T}}$ を満足することを示しなさい。また，行列 A を対角化しなさい。ただし，P^{T} は P の転置行列を表す。

(3) k を 0 以上の整数とし，A^k を 2×2 行列 B, C を用いて，$A^k = {\lambda_1}^k B + {\lambda_2}^k C$ の形に表す。B, C を求めなさい。ただし，$A^0 = I$ (I は 2×2 の単位行列) である。

(4) $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathrm{R}^2$ とし，$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}$ とする。行列 A の対角化を利用し，すべての $\boldsymbol{x} \in \mathrm{R}^2$ (すべての実数 x_1, x_2) に対して，$f(\boldsymbol{x}) \geqq 0$ となるときの a の取り得る値の範囲を求めなさい。ただし，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ は $\boldsymbol{x}$ を転置したベクトルを表す。

長崎大学大学院総合生産科学研究科 博士前期課程 総合生産科学専攻
共生システム科学コース（電気・機械システム分野）および海洋未来科学コース
機械系　令和６年度一般入試【夏期募集】

数　学

[3] 原点を O とする xyz 直交座標空間において，次式で表される曲面を S とする。

$$S = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\ z \geqq 0 \right\}$$

S 上の任意の点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ と xy 平面上の点 $\mathrm{Q}(x, y, 0)$ に対して，線分 OP と z 軸の正の向きとなす角を θ とし，線分 OQ と x 軸の正の向きとなす角を φ とする。以下の問いに答えなさい。ただし，$\boldsymbol{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とする。

(1) x, y, z を θ, φ を用いてそれぞれ表しなさい。また，θ, φ の取り得る値の範囲をそれぞれ示しなさい。

(2) (1) の x, y, z に対して，

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} \partial x/\partial\theta \\ \partial y/\partial\theta \\ \partial z/\partial\theta \end{bmatrix},\quad \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} \partial x/\partial\varphi \\ \partial y/\partial\varphi \\ \partial z/\partial\varphi \end{bmatrix}$$

とするとき，$\dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \theta}$ と $\dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \varphi}$ の外積ベクトル $\dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \theta} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \varphi}$ を求めなさい。

(3) S の表面積を A とすると，

$$A = \iint_D \left\| \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \varphi} \right\| \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\varphi$$

である。上式を用いて A を求めなさい。ただし，D は S に対応する $\theta\varphi$ 座標平面における領域であり，$\|\cdot\|$ はベクトルのノルムを表す。