

令和 7 年度総合生産科学研究科博士前期課程総合生産科学専攻

一般入試 (夏期募集)

共生システム科学コース 電気・機械システム分野 (機械系)

海洋未来科学コース (機械系)

数学

- 1 a を実数とし、実数を要素に持つ 2×2 行列 A を $A = \begin{bmatrix} a+3 & 2 \\ 2 & a+3 \end{bmatrix}$ とする。 $\mathbb{R}^1$ に属するベクトルから成るベクトル列 $\{x_n\}$ (n は自然数) を次の漸化式で定義する。

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_n = Ax_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

以下の問いに答えなさい。ただし、 $\|\cdot\|$ はベクトルのノルムを表す。

- (1) 行列 A の固有値を λ_1, λ_2 ($\lambda_1 \leq \lambda_2$) とするとき、 λ_1, λ_2 の値と、 λ_1, λ_2 に対応する固有ベクトル v_1, v_2 のうち、 $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$ 満たす v_1, v_2 をそれぞれ求めなさい。
- (2) k を 0 以上の整数とする。行列 A の対角化を利用して A^k を求め、 A^k を 2×2 行列 B, C を用いて、 $A^k = \lambda_1^k B + \lambda_2^k C$ の形に表すとする。 B, C をそれぞれ求めなさい。
- (3) x_n を a, n を用いて表しなさい。
- (4) ベクトル $X_n \in \mathbb{R}^2$ を $X_n = \sum_{k=1}^{n-1} x_k$ とする。 $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ が $\mathbb{R}^2$ に属するあるベクトル X に収束するとき、 a の値の取り得る範囲を求めなさい。また、そのときの X を求めなさい。

令和 7 年度総合生産科学研究科博士前期課程総合生産科学専攻

一般入試（夏期募集）

共生システム科学コース 電気・機械システム分野（機械系）

海洋未来科学コース（機械系）

数学

2 x, z を実数, y を $0 \leq y \leq 2$ を満たす実数とし, 関数 $\varphi(x, y, z)$ を $\varphi(x, y, z) = z - \sqrt{4 - y^2}$ とする。

ベクトル $A \in \mathbb{R}^3$ を $A = \begin{bmatrix} 3x \\ 4z \\ 2y \end{bmatrix}$ とする。また, 原点を O とする xyz 直交座標空間において, 次式で表される曲面を S とする。

$$S = \{(x, y, z) \mid \varphi(x, y, z) = 0, 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$$

以下の問いに答えなさい。ただし, $\| \cdot \|$ はベクトルのノルムを, $\cdot$ はベクトルの内積をそれぞれ表す。

(1) ベクトル $g, n \in \mathbb{R}^3$ を $g = \begin{bmatrix} \partial\varphi/\partial x \\ \partial\varphi/\partial y \\ \partial\varphi/\partial z \end{bmatrix}$, $n = \frac{1}{\|g\|}g$ とする。曲面 S 上の点における g, n を y を用いて表しなさい。ただし, $0 \leq y < 2$ とする。

(2) S 上の任意の点 $P(x, y, z)$ に対して, $p = \overrightarrow{OP}$ とする。ベクトル p の各成分を x で偏微分したベクトルを $\frac{\partial p}{\partial x}$, y で偏微分したベクトルを $\frac{\partial p}{\partial y}$ とする。 $\frac{\partial p}{\partial x}$ を求めなさい。また $\frac{\partial p}{\partial y}$ を y を用いて表しなさい。ただし, $0 \leq y < 2$ とする。

(3) (2) のベクトル $\frac{\partial p}{\partial x}$ と $\frac{\partial p}{\partial y}$ に対して, 外積ベクトル $\frac{\partial p}{\partial x} \times \frac{\partial p}{\partial y}$ を y を用いて表しなさい。

また, そのノルム $\left\| \frac{\partial p}{\partial x} \times \frac{\partial p}{\partial y} \right\|$ を y を用いて表しなさい。ただし, $0 \leq y < 2$ とする。

(4) $A \cdot n \left\| \frac{\partial p}{\partial x} \times \frac{\partial p}{\partial y} \right\|$ を y を用いて表し, 次の 2 重積分の値を求めなさい。ただし, D は曲面 S に対応する xy 平面における領域である。

$$\iint_D A \cdot n \left\| \frac{\partial p}{\partial x} \times \frac{\partial p}{\partial y} \right\| dx dy$$