

1. 自然数 $n = 1, 2, \dots$ について, 数列 $a_n = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$ を定義する. 下記の問に解答せよ.

(1) 広義積分の定義に基づいて $a_1 = \int_0^\infty e^{-x} dx$ を求めよ.

(2) $M > 0$ のとき, 次の式が成立することを示せ.

$$\int_0^M x^n e^{-x} dx = -M^n e^{-M} + n \int_0^M x^{n-1} e^{-x} dx \quad (*)$$

(3) 広義積分 $\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$ が収束すると仮定する. 式 (*) で $M \rightarrow \infty$ として,
 a_{n+1} を a_n を用いて表せ.

(4) 問 (1) および 問 (3) の結果を用いて, a_{n+1} を n の式で表せ.

解答欄（解答欄が不足した場合は, その旨明記した上で裏面を利用すること.）

2. \mathbb{R}^3 の基底をなす 3 つのベクトル $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ から,

シュミットの直交化法を用いて \mathbb{R}^3 の正規直交基底を求めよ.

解答欄 (解答欄が不足した場合は, その旨明記した上で裏面を利用すること.)

3. 連続変数 x の関数 $y(x)$ とその導関数 $y' = \frac{dy}{dx}$ について、下記の問題に解答せよ。

- (1) 微分方程式 $y' - 2xy = 0$ の一般解を求めよ。
- (2) 微分方程式 $y' - 2xy = 4x^2 e^{(x^2)}$ の一般解を求めよ。
- (3) 微分方程式 $y' - 2xy = 9xe^{(-x^2)}$ の一般解を求めよ。

解答欄（解答欄が不足した場合は、その旨明記した上で裏面を利用すること。）

4. 連続型確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が, 正の実数 α を用いて

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ \alpha x^2 & (0 \leq x \leq 1) \\ \alpha x^{-4} & (x > 1) \end{cases}$$

で与えられるとする. 下記の問に解答せよ.

- (1) X の期待値 $E(X)$ を α の式で表せ.
- (2) X^2 の期待値 $E(X^2)$ を α の式で表せ.
- (3) $f(x)$ が確率密度関数であることを利用して α の値を求めよ.
- (4) 問 (3) で求めた α の値を用いて X の期待値 $E(X)$ を求めよ.
- (5) 問 (3) で求めた α の値を用いて X の分散 $V(X)$ を求めよ.

解答欄 (解答欄が不足した場合は, その旨明記した上で裏面を利用すること.)